2014 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選複賽試題

_________縣市_________國民中學_____年級　編號：_________　姓名：__________

作答時間: 二 小 時　　　　性別: □男 □女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 設 $P=2^{103}-1$，則 P 被 5 除的餘數是____________。

【參考解法 1】

觀察 2 的冪次的個位數碼，可知從 2 的 1 次方開始，其個位數碼依序為 2、4、8、6 這四個數碼循環重複出現。因 103=4×25+3，故知 2^{103} 的個位數碼為 8，即 $2^{103}-1$ 的個位數碼為 7，因此 P 除以 5 的餘數是 2。

【參考解法 2】

由費馬小定理可以得知 $2^4\equiv 1 \pmod 5$，因此 $2^{103}-1\equiv 2^3-1\equiv 7\equiv 2 \pmod 5$，因此 P 除以 5 的餘數是 2。

答：2

2. 設 $Q=\dfrac{1-2}{1^2-2^2}+\dfrac{1-2+3}{1^2-2^2+3^2}+\dfrac{1-2+3-4}{1^2-2^2+3^2-4^2}+\dots\dots+\dfrac{1-2+3-4+\dots+9}{1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+9^2}$，

則 $Q=$____________。

【參考解法 1】

可知 Q 的表達式中，每一項的分子依序為 $1-2=-1$、$-1+3=2$、$2-4=-2$、$-2+5=3$、$3-6=-3$、$-3+7=4$、$4-8=-4$、$-4+9=5$，

而每一項的分母依序為 $1^2-2^2=1-4=-3$、$-3+3^2=-3+9=6$、$6-4^2=6-16=-10$、$-10+5^2=-10+25=15$、$15-6^2=15-36=-21$、$-21+7^2=-21+49=28$、$28-8^2=28-64=-36$、$-36+9^2=-36+81=45$，

因此可得：

$$\begin{aligned}Q&=\frac{-1}{-3}+\frac{2}{6}+\frac{-2}{-10}+\frac{3}{15}+\frac{-3}{-21}+\frac{4}{28}+\frac{-4}{-36}+\frac{5}{45}\\&=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)\\&=\frac{2(3\times5\times7+7\times9+5\times9+5\times7)}{5\times7\times9}\\&=\frac{496}{315}\end{aligned}$$

【参考解法 2】

可知：

$$\frac{1-2+3-4+\cdots+(2n-1)-2n}{1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2}=\frac{(1-2)+(3-4)+\cdots+[(2n-1)-2n]}{(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\cdots+[(2n-1)^2-(2n)^2]}$$

$$=\frac{-n}{-1-2-3-4-\cdots-(2n-1)-2n}$$

$$=\frac{n}{1+2+3+4+\cdots+2n}$$

$$=\frac{n}{\frac{(1+2n)\times 2n}{2}}$$

$$=\frac{1}{2n+1}$$

$$\frac{1-2+3-4+\cdots-2n+(2n+1)}{1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-(2n)^2+(2n+1)^2}=\frac{1+(-2+3)+(-4+5)+\cdots+[-2n+(2n+1)]}{1^2+(-2^2+3^2)+(-4^2+5^2)+\cdots+[-(2n)^2+(2n+1)^2]}$$

$$=\frac{n+1}{1+2+3+4+5+\cdots+2n+(2n+1)}$$

$$=\frac{n+1}{\frac{[1+(2n+1)]\times(2n+1)}{2}}$$

$$=\frac{2(n+1)}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2n+1}$$

故可推得

$$Q=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}$$

$$=2(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9})$$

$$=\frac{2(3\times5\times7+7\times9+5\times9+5\times7)}{5\times7\times9}$$

$$=\frac{496}{315}$$

答：$\frac{496}{315}$

3. 已知方程 $x^2+2014^2x+2013\times2015=0$ 有兩個根 α 與 β，若 $\alpha>\beta$，
則 $\alpha=$ ______________ 。

【參考解法 1】

因 $2013\times2015=(2014-1)(2014+1)=2014^2-1$，故可將原式改寫為

$$x^2+2014^2x+(2014^2-1)=0$$

此時可以觀察出可因式分解得 $(x+1)(x+2013\times2015)=0$。因 $\alpha>\beta$，故可推得 $\alpha=-1$、$\beta=-2013\times2015$。

【參考解法 2】

由根與係數的關係可知：

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-2014^2\\ \alpha\beta=2013\times2015\end{cases}$$

故有 $\alpha\beta=2013\times2015=(2014-1)(2014+1)=2014^2-1=-(\alpha+\beta)-1$，此即

$$\alpha\beta+\alpha=-\beta-1$$

$$\alpha(\beta+1)=-(\beta+1)$$

若 $\beta=-1$，則知 $\alpha=-2014^2+1<-1=\beta$，與題意矛盾；

若 $\beta\neq-1$，則知 $\alpha=\dfrac{-(\beta+1)}{\beta+1}=-1$，此時 $\beta=-2014^2+1<-1=\alpha$，滿足題意。

故知 $\alpha=-1$。

答：-1

4. 假設 55 位同學每人各得知一條消息，且任意兩人所得的消息都不相同。他們用電話兩兩互相告訴對方所得知的全部消息。若每次通話都使用 1 分鐘，則至少需要__________分鐘才能使每個人都知道全部的消息。

【參考解法】

因要求出所需的最少時間，故考慮每分鐘可傳遞的最多消息數量。而對於這 55 位同學內的其中一位 A 同學來說，第一分鐘後至多可得知 2 條消息、再經過一分鐘後至多可得知 4 條消息、再經過一分鐘後至多可得知 8 條消息、再經過一分鐘後至多可得知 16 條消息、再經過一分鐘後至多可得知 32 條消息，此時已經過五分鐘，因此再經過一分鐘的電話聯絡合計 6 分鐘後便可得知全部的 55 條消息。但因每分鐘都至少有一位同學未通話，故知 6 分鐘不可能使全部的同學都得知消息，因此至少需 7 分鐘。可如以下方式安排通話：

【通話方式 1】

先考慮只有 32 位同學時，利用以下方式可在 5 分鐘後使這 32 位同學都知道 32 條消息：

第一分鐘，可配成 16 對通話

第二分鐘通話前，在每一對裡都任選一位同學共 16 位同學來組成 A 組、其餘的 16 位同學組成 B 組，此時兩組內已知的消息都相同。故第二分鐘為將各組內分別自行配成 8 對通話。

第三分鐘通話前，依相同想法，分別將 A、B 兩組各自再分成兩組：A_1 與 A_2、B_1 與 B_2，一共四組，每組 8 人且這四組內已知的消息都相同。故第三分鐘為將各組內分別自行配成 4 對通話。
第四分鐘通話前，依相同想法，分別將 A_1、A_2、B_1、B_2 這四組各自都再分成兩組：A_{11} 與 A_{12}、A_{21} 與 A_{22}、B_{11} 與 B_{12}、B_{21} 與 B_{22}，一共八組，每組 4 人且這八組內已知的消息都相同。故第四分鐘為將各組內分別自行配成 2 對通話。
第五分鐘通話前，依相同想法，分別將 A_{11}、A_{12}、A_{21}、A_{22}、B_{11}、B_{12}、B_{21}、B_{22} 這八組各自都再分成兩組：A_{111} 與 A_{112}、A_{121} 與 A_{122}、A_{211} 與 A_{212}、A_{221} 與 A_{222}、B_{111} 與 B_{112}、B_{121} 與 B_{122}、B_{211} 與 B_{212}、B_{221} 與 B_{222}，一共十六組，每組 2 人且這十六組內已知的消息都相同。故第五分鐘為這十六組內自行彼此通話。此時這 32 位同學都已經知道了 32 條消息。
現有 55 位同學，故可先挑選出 32 位同學為 X 組、其餘的 23 位同學為 Y 組。第 1 分鐘時由 23 位 Y 組的同學與 X 組中的 23 位同學通話，使 X 組內已知的消息包含所有 Y 組的消息，此即為全部的 55 條消息；接著第 2 分鐘至第 6 分鐘則由 X 組內的同學依照上述通話方式通話，使 X 組內的 32 位同學全部都知道全部的 55 條消息；第 7 分鐘再讓 23 位 Y 組的同學與 X 組中的 23 位同學通話，此時全部的同學都已得知全部的消息。
【通話方式 2】
不妨將 55 位學生依序編號為 A_1、A_2、⋯、A_{55}，A_n 所知的消息訂為消息 n。
第一分鐘，可使 A_{2n-1} 與 A_{2n} 通話，$1 \le n \le 27$，A_{55} 無法通電話，則 54 位同學所知的消息數為 2、另有 1 位同學所知的消息數為 1，如下表：

學生編號	已知消息數	人數	已知消息編號
A_{2n-1}、A_{2n}	2	54	$2n-1$、$2n$
A_{55}	1	1	55

第二分鐘，可使 A_{4n-3} 與 A_{4n-1} 通話、A_{4n-2} 與 A_{4n} 通話，$1 \le n \le 13$，A_{55} 與 A_{53} 通話、A_{54} 無法通電話，則 52 位同學所知的消息數為 4、另有 2 位同學所知的消息數為 3、1 位同學所知消息數為 2，如下表：

學生編號	已知消息數	人數	已知消息編號
A_{4n-3}、A_{4n-2}、A_{4n-1}、A_{4n}	4	52	$4n-3$、$4n-2$、$4n-1$、$4n$
A_{53}、A_{55}	3	2	53、54、55
A_{54}	2	1	53、54

第三分鐘可使 A_{8n-7} 與 A_{8n-3} 通話、A_{8n-6} 與 A_{8n-2} 通話、A_{8n-5} 與 A_{8n-1} 通話、A_{8n-4} 與 A_{8n} 通話，$1 \le n \le 6$，A_{55} 與 A_{49} 通話、A_{54} 與 A_{50} 通話、A_{53} 與 A_{51} 通話、A_{52} 無法通電話，則 48 位同學所知的消息數為 8、另有 4 位同學所知的消息數為 7、2 位同學所知消息數為 6、1 位同學所知消息數為 4，如下表：

學生編號	已知消息數	人數	已知消息編號
A_{8n-7}、A_{8n-6}、A_{8n-5}、A_{8n-4}、A_{8n-3}、A_{8n-2}、A_{8n-1}、A_{8n}	8	48	$8n-7$、$8n-6$、$8n-5$、$8n-4$、$8n-3$、$8n-2$、$8n-1$、$8n$
A_{49}、A_{51}、A_{53}、A_{55}	7	4	49、50、⋯、54、55
A_{50}、A_{54}	6	2	49、50、51、52
A_{52}	4	1	53、54、55

可知在第三分鐘後，A_1、A_2、⋯、A_{40}依所知的訊息內容可分成 5 組，故第四分鐘將這 40 位同學通話規則改為：

在 A_1、A_2、⋯、A_{16} 中，使 A_x 與 A_y 通話，其中 $x+y=17$；

在 A_{21}、A_{22}、⋯、A_{28} 中，使 A_x 與 A_y 通話，其中 $x+y=49$；

在 A_{29}、A_{30}、⋯、A_{36} 中，使 A_x 與 A_y 通話，其中 $x+y=65$；

在 A_{17}、A_{18}、A_{19}、A_{20}、A_{37}、A_{38}、A_{39}、A_{40} 中，使 A_x 與 A_y 通話，其中 $x+y=57$。

而在 A_{41}、A_{42}、⋯、A_{55} 中，使 A_x 與 A_y 通話，其中 $x+y=96$，但 A_{48} 無法通電話，則 40 位同學所知的消息數為 16、另有 8 位同學所知的消息數為 15、4 位同學所知消息數為 14、2 位同學所知消息數為 12、1 位同學所知消息數為 8，如下表：

學生編號	已知消息數	人數	已知消息編號
A_1、A_2、⋯、A_{16}	16	16	1、2、⋯、15、16
A_{17}、A_{18}、A_{19}、A_{20}、A_{37}、A_{38}、A_{39}、A_{40}	16	8	17、18、⋯、23、24、33、34、⋯、39、40
A_{21}、A_{22}、⋯、A_{28}	16	8	17、18、⋯、31、32
A_{29}、A_{30}、⋯、A_{36}	16	8	25、26、⋯、39、40
A_{41}、A_{43}、A_{45}、A_{47}、A_{49}、A_{51}、A_{53}、A_{55}	15	8	41、42、⋯、54、55
A_{42}、A_{46}、A_{50}、A_{54}	14	4	41、42、⋯、53、54
A_{44}、A_{52}	12	2	41、42、⋯、51、52
A_{48}	8	1	41、42、⋯、47、48

第五分鐘，此時依據同學已知的訊息內容，將同學通話規則改為：

在 A_1、A_2、⋯、A_{16}、A_{41}、A_{42}、⋯、A_{55} 中，使 A_x 與 A_y 通話，其中 $x+y=56$，但 A_{16} 無法通電話；

在 A_{17}、A_{18}、⋯、A_{24} 中，使 A_x 與 A_y 通話，其中 $x+y=41$；

在 A_{25}、A_{26}、⋯、A_{32} 中，使 A_x 與 A_y 通話，其中 $x+y=57$；
在 A_{33}、A_{34}、⋯、A_{40} 中，使 A_x 與 A_y 通話，其中 $x+y=77$。
則 16 位同學所知的消息數為 31、另有 26 位同學所知的消息數為 24、8 位同學所知消息數為 30、4 位同學所知消息數為 28、1 位同學所知消息數為 16，即可得下表：

學生編號	已知消息數	人數	已知消息編號
A_1、A_3、A_5、A_7、A_9、A_{11}、A_{13}、A_{15}、A_{41}、A_{43}、A_{45}、A_{47}、A_{49}、A_{51}、A_{53}、A_{55}、	31	16	1、2、⋯、15、16、41、42、⋯、54、55
A_2、A_6、A_{10}、A_{14}、A_{42}、A_{46}、A_{50}、A_{54}	30	8	1、2、⋯、15、16、41、42、⋯、53、54
A_4、A_{12}、A_{44}、A_{52}	28	4	1、2、⋯、15、16、41、42、⋯、51、52
A_6、A_{48}	24	2	1、2、⋯、15、16、41、42、⋯、47、48
A_{16}	16	1	1、2、⋯、15、16
A_{17}、A_{18}、⋯、A_{40}	24	24	17、18、⋯、39、40

第六分鐘，讓 A_1、A_3、A_5、A_7、A_9、A_{11}、A_{13}、A_{15}、A_{41}、A_{43}、A_{45}、A_{47}、A_{49}、A_{51}、A_{53}、A_{55} 這 16 位同學依序與 A_{17}、A_{18}、⋯、A_{32} 這 16 位同學通話，則可讓 32 位同學已知全部 55 條消息；
第七分鐘後，讓已知全部 55 條消息的其中 23 位同學分別與其餘第六分鐘未通話的同學通話，便可讓全部的同學都得知全部的消息。

答：7 分鐘

5. 設 n 為正整數且其正因數的個數恰有 30 個，若其正因數中必有 7、9 與 25，則 n 的所有可能值有________個。

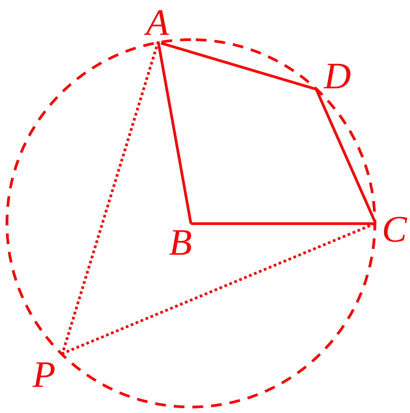
【參考解法】

可知 $9=3^2$、$25=5^2$，因此可知至少有 3、5、7 這三個質因數，且寫成質因數分解式時，3 與 5 的冪次至少為 2。因至少有三個質因數，故現觀察 30 寫成三個以上大於 1 的正整數的乘積的形式，且由 3 與 5 的冪次至少為 2 知其中至少二個正整數大於或等於 3。可知僅 $30=2\times3\times5$ 可滿足以上條件，故知 n 的可能值為 $7\times3^2\times5^4$、$7\times5^2\times3^4$，合計共 2 個可能值。

答：2 個

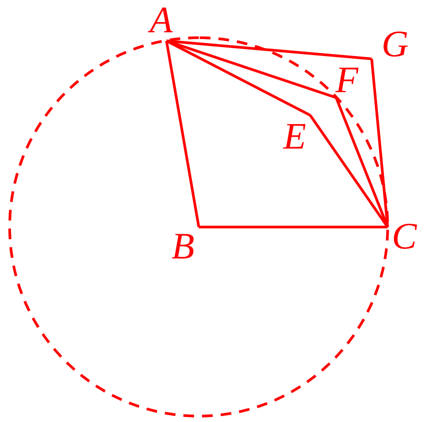
6. 在凸四邊形 $ABCD$ 中，已知 $AB=BC=12$，若 $\angle ABC=100^\circ$ 且 $\angle CDA=130^\circ$，則 BD 之長為＿＿＿＿＿。

【參考解法 1】



以 B 為圓心、AB 為半徑作圓。由 $AB=BC$ 可知 C 會落在圓 B 的圓周上。如圖所示，任取一個落在優弧 AC 上的點 P，可知 $\angle APC=\frac{1}{2}\angle ABC=50^\circ$，因此 $\angle CDA+\angle APC=130^\circ+50^\circ=180^\circ$，故可推得 A、D、C、P 四點共圓。因 A、P、C 都在圓 B 的圓周上，故點 D 也在圓 B 的圓周上，因此 $BD=AB=12$。

【參考解法 2】



以 B 為圓心、AB 為半徑作圓。由 $AB=BC$ 可知 C 會落在圓 B 的圓周上。如圖所示，令任取一個落在圓 B 內部的點 E、任取一個落在圓 B 圓周上的點 F、任取一個落在圓 B 外部的點 G，使得 $ABCE$、$ABCF$、$ABCG$ 為凸四邊形。

此時可知無論 F 點位於何處，恆有

$\angle AFC=\dfrac{360^\circ-\angle ABC}{2}=130^\circ$，且透過適當地在圓周上選取點 H、I，使四邊形 $AECH$、$AICG$ 為不自交的凹四邊形，於是可推知 $\angle AEC>130^\circ>\angle AGC$。

現由題意知 $\angle CDA=130^\circ$，可判斷出點 D 在圓 B 的圓周上，即 $BD=AB=12$。

答：12

7. 在圓形道路上，甲、乙二人分別從 A 點以勻速進行，甲依順時鐘方向先走 4 km，此時乙才依逆時鐘方向出發。當甲共走了 $\frac{1}{3}$ 圈之距離時，乙恰好走了 10 km。當乙共走了 $\frac{1}{2}$ 圈之距離時，甲恰好共走了 13 km (從出發開始計算)。若當乙第一次走回 A 點時，則甲還要再走＿＿＿＿ km 才會到達 A 點。

【參考解法 1】

假設此圓形道路一圈的長度為 s km、甲的速度為 a、乙的速度為 b。則由題意可得：

$$\begin{cases} \dfrac{s}{b}=2\times\dfrac{13-4}{a} \\ \dfrac{\frac{1}{3}s-4}{a}=\dfrac{10}{b} \end{cases}$$

化簡後可得

$$\begin{cases} sa = 18b \\ sb = 30a + 12b \end{cases}$$

兩式相除後可得

$$\frac{a}{b} = \frac{3b}{5a+2b}$$

$$5a^2 + 2ab - 3b^2 = 0$$

$$(5a-3b)(a+b) = 0$$

因 a、b 恆為正數，故知 $a = \frac{3}{5}b$，代回 $sa = 18b$ 可得 $s = 30$。由題意可判斷知當乙走了一圈後，甲走了 $4+9+9=22$ km，因此甲還需再走 $s-22=30-22=8$ km 才會到達 A 點。

【參考解法 2】

假設此圓形道路一圈的長度為 s km。

由「甲依順時鐘方向先走 4 km，此時乙才依逆時鐘方向出發。當甲走了圓的 $\frac{1}{3}$ 圈之距離時，乙恰好走了 10 km」可知甲、乙的速度比為 $\frac{1}{3}s-4$ ：10；

由「甲依順時鐘方向先走 4 km，此時乙才依逆時鐘方向出發。當乙共走了圓的 $\frac{1}{2}$ 圈之距離時，甲恰好共走了 13 km」可知甲、乙的速度比為 $13-4$ ：$\frac{1}{2}s$ = 9：$\frac{1}{2}s$，且當乙走了一圈後，甲走了 $4+9+9=22$ km，因此甲還需再走 $s-22$ km 才會到達 A 點。

故知 $\frac{1}{3}s-4$ ：10 = 9：$\frac{1}{2}s$，即：

$$90 = \frac{1}{6}s^2 - 2s$$

$$s^2 - 12s - 540 = 0$$

$$(s+18)(s-30) = 0$$

因 s 恆為正數，故知 s= 30。據此可得知甲還需再走 8 km 才會到達 A 點

答：8 km

8. 設方程 $xy + 1000z = 2014$ 的正整數解為 (x, y, z)，則這些正整數解的個數總共有＿＿＿＿＿個。

【參考解法】

可知 $0 < z < 3$：

當 $z=1$ 時，$xy = 1014 = 1\times1014 = 2\times507 = 3\times338 = 6\times169 = 13\times78 = 26\times39$，故知此時共有 $2\times6 = 12$ 個正整數解；

當 $z=2$ 時，$xy = 14 = 1\times14 = 2\times7$，故知此時共有 $2\times2 = 4$ 個正整數解。

因此知合計共有 12 + 4 = 16 個正整數解。 答：16 個

9. 某社團共有 25 位委員，其中任何五位都可以組成一個專門委員會，但是任何二個專門委員會都沒有超過一位相同的委員，則至多可以組成________個專門委員會。

【參考解法 1】

可知 25 位委員中任兩位委員最多只能在同一個委員會。因將 25 位委員兩兩配對共 $\frac{25\times24}{2}=300$ 對，而將組成一個委員會的五位委員兩兩配對共有 $\frac{5\times4}{2}=10$ 對，故至多可組成 $\frac{300}{10}=30$ 個委員會。

【參考解法 2】

若一位委員 A 參加七個或七個以上的委員會時，則他所參加的委員會中其它的委員至少需有 4×7=28 位，但因這些委員會除了 A 以外不能再有相同的委員，故知委員總數至少需有 28+1=29 位委員，矛盾，因此一位委員至多參加六個會，此時所有委員會的人數合計至多共有 $6\times25=150$ 位，因此至多可組成 $\frac{150}{5}=30$ 個委員會。

【參考解法 3】

若至少有 31 個委員會，則在 31 個委員會中合計共有 $5\times31=155$ 位委員。而現因 $6\times25=150<155$，故知至少有一位的委員在這 31 個委員會中至少參加七個委員會，而在同一位委員所參加的七個委員會中，其它的委員至少需有 4×7=28 位，但現只有 24 位其他的委員，故至少會有一位其他的委員參加了這七個委員中的二個，矛盾，因此至多有 30 個委員會。

25 位委員參與 30 個委員會的方式可如：

【參與方式 1】

將這 25 位委員視為座標平面中的 25 個整數點 (x, y)，其中 $0\le x\le4$、$0\le y\le4$。此時觀察以下 30 條直線在模 5 時所經過這 25 個整數點的情況：

$y=0$、$y=1$、$y=2$、$y=3$、$y=4$、$y=x$、$y=x+1$、$y=x+2$、$y=x+3$、$y=x+4$、$y=2x$、$y=2x+1$、$y=2x+2$、$y=2x+3$、$y=2x+4$、$y=3x$、$y=3x+1$、$y=3x+2$、$y=3x+3$、$y=3x+4$、$y=4x$、$y=4x+1$、$y=4x+2$、$y=4x+3$、$y=4x+4$。

可知其中任兩條直線只會有一個交點，且每一條直線都恰經過 5 個整數點。因此可讓同一條直線上的整數點所代表的委員參加同一個委員會，即滿足題意。

【參與方式 2】

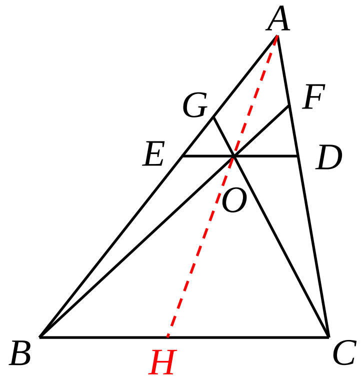
將這 25 個委員依序從 1 開始編號至 25，可如以下方式組成 30 個專門委員會：

委員會 1	1	2	3	4	5
委員會 2	1	6	7	8	9
委員會 3	1	10	11	12	13
委員會 4	1	14	15	16	17
委員會 5	1	18	19	20	21
委員會 6	1	22	23	24	25
委員會 7	2	6	11	16	21
委員會 8	2	10	15	20	25
委員會 9	2	14	19	24	9
委員會 10	2	18	23	8	13
委員會 11	2	22	7	12	17
委員會 12	3	6	15	24	13
委員會 13	3	10	19	8	17
委員會 14	3	14	23	12	21
委員會 15	3	18	7	16	25
委員會 16	3	22	11	20	9
委員會 17	4	6	19	12	25
委員會 18	4	10	23	16	9
委員會 19	4	14	7	20	13
委員會 20	4	18	11	24	17
委員會 21	4	22	15	8	21
委員會 22	5	6	23	20	17
委員會 23	5	10	7	24	21
委員會 24	5	14	11	8	25
委員會 25	5	18	15	12	9
委員會 26	5	22	19	16	13
委員會 27	6	10	14	18	22
委員會 28	7	11	15	19	23
委員會 29	8	12	16	20	24
委員會 30	9	13	17	21	25

答：30 個

10.如圖，在$\triangle ABC$中，已知$5AE=2AB$，$5AD=2AC$，O為ED線上的一點，連接BO交AC於F，連接CO交AB於G，則$\dfrac{AG}{BG}+\dfrac{AF}{CF}=$__________。

【參考解法1】



因$5AE=2AB$、$5AD=2AC$，故知$AE:EB=AD:DC=2:3$，且據此可推知$DE//BC$。現連接AO並延長交BC邊於點H，故可得知$AO:OH=2:3$。又可得知：

$\triangle ABO$的面積：$\triangle OBH$的面積$=2:3$、

$\triangle ACO$的面積：$\triangle OCH$的面積$=2:3$，

因此知

凹四邊形$ABOC$面積：$\triangle BOC$面積$=2:3$

而由共邊定理可得$AG:BG=\triangle ACO$的面積：$\triangle BCO$的面積、

$AF:CF=\triangle ABO$的面積：$\triangle BCO$的面積，

故知$\dfrac{AG}{BG}+\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{\triangle ACO\text{的面積}}{\triangle BCO\text{的面積}}+\dfrac{\triangle ABO\text{的面積}}{\triangle BCO\text{的面積}}=\dfrac{\text{凹四邊形}ABOC\text{的面積}}{\triangle BCO\text{的面積}}=\dfrac{2}{3}$。

【參考解法2】

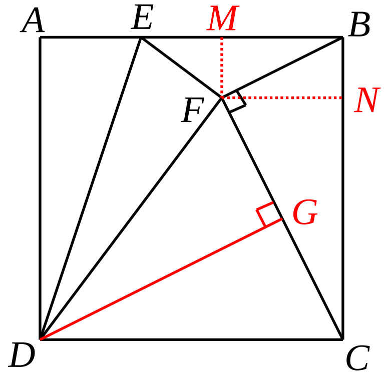
若令$BC=5$，則可知$ED=2$。假設$OE=x$、$OD=y$，則有$x+y=2$。

可知$\triangle GEO\sim\triangle GBC$，故若令$GE=kx$，則$GB=5k$，即可推得$BE=k(5-x)$、$AE=\dfrac{2}{3}k(5-x)$且$AG=\dfrac{5k(2-x)}{3}$，因此$\dfrac{AG}{BG}=\dfrac{2-x}{3}$。同樣地，可推得$\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{2-y}{3}$，因此$\dfrac{AG}{BG}+\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{2-x}{3}+\dfrac{2-y}{3}=\dfrac{2}{3}$。

答：$\dfrac{2}{3}$

11.如下圖，已知E是正方形$ABCD$的AB邊一點，設A關於DE的對稱點為F，且$\angle BFC=90^\circ$，則$\dfrac{AB}{AE}$的值為__________。

【參考解法1】



如圖，作$DG\perp FC$交FC於點G。因點F是點A關於DE的對稱點，故知$DF=AD=DC$，即知$\angle DFG=\angle DCG$且DG為FC的中垂線，故得$\angle DFG+\angle FCB=\angle DCG+\angle FCB=90^\circ$；

再因$\angle BFC=90^\circ$，故知$\angle FBC+\angle FCB=90^\circ$。

因此$\angle DFG=\angle CBF$

再由點F位置可知$DF=AD=BC$，

且有$\angle FGD=90^\circ=\angle BFC$，

故知$\triangle DFG\cong\triangle CBF$，即$BF=FG$，再由$DG$為$FC$的中垂線知$FG=CG$，因此$BF:CF=1:2$。不妨令$BF=1$、$CF=2$，則$BC=\sqrt{5}$，此即為正方形的邊長。

現再從 F 分別往 AB、BC 作垂線分別交 AB、BC 於 M、N，利用直角三角形的母子相似可推得 $BN=FM=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{5}\sqrt{5}$、$FN=BM=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$，因此 $AM=\frac{3}{5}\sqrt{5}$。再令 $AE=EF=x$，則知 $EM=\frac{3}{5}\sqrt{5}-x$。再由勾股定理可得

$$EF^2=FM^2+EM^2$$

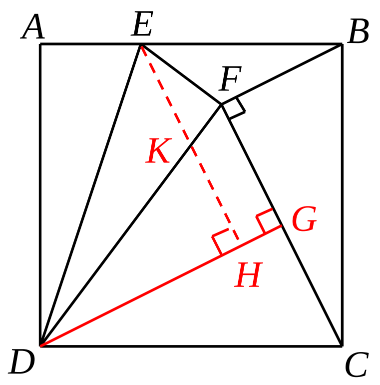
$$x^2=(\frac{1}{5}\sqrt{5})^2+(\frac{3}{5}\sqrt{5}-x)^2$$

$$x^2=\frac{1}{5}+\frac{9}{5}-\frac{6}{5}\sqrt{5}x+x^2$$

$$x=\frac{5}{3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

因此 $\frac{AB}{AE}=\frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=3$。

【參考解法 2】



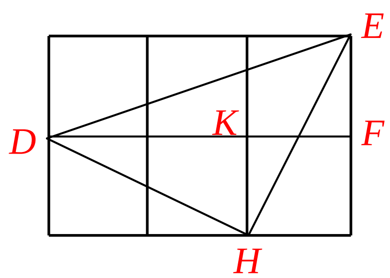
同參考解法 1，證得△DFG≅△CBF 後，再因 DG 為 FC 的中垂線知△DFG≅△DCG，故△DFG≅△CBF，即可得 $\frac{FG}{DG}=\frac{BF}{CF}=\frac{1}{2}$。

此時也可得知

$\angle EDG=\angle EDF+\angle FDG=\frac{1}{2}(\angle ADF+\angle FDC)=45°$。

作 $EH\perp DG$ 交 DG 於點 H、交 DF 於點 K，接著可將等腰直角三角形 DEH 置入一個 2×3 的方格表中，如圖所示。

此時因 $\frac{HK}{DK}=\frac{FG}{DG}=\frac{1}{2}$，故可判斷出點 K、F 會落在圖中所示之位置，此時便可得知 $\frac{AB}{AE}=\frac{DF}{EF}=3$。



答：3

12. 已知正整數 N 是完全平方數，且不以 0 結尾。若移除 N 的末尾兩個數碼後所得的數仍是完全平方數，則具有上述性質的最大正整數 N 是＿＿＿＿＿＿。

【參考解法 1】

可知存在整數 a、b、m 使得 $N=m^2=100a^2+b$，其中 $0<b<100$，因此有 $b=m^2-100a^2=(m+10a)(m-10a)$。此時再令 $b_1=m+10a$、$b_2=m-10a$，則知 $20a=b_1-b_2<b<100$，即可得知 $a\le 4$，因此 $N<1700$。因要找出 N 的最大值，故取 $a=4$，此時經計算可得知 $40^2=1600<41^2=1681<1764=42^2$，所以 N 的最大值為 $41^2=1681$。

【參考解法 2】

由題意可知，若將 N 的末尾兩位數碼皆同時替換為 0，則所得的數仍為完全平方數，現令此數為 n^2，則可知 n 的個位數必為 0、$N\ge(n+1)^2$，且 $(n+1)^2-n^2\le 99$，即有 $n\le 49$。故可得知 n 最大為 40；

再因 $41^2=1681<1699<1764=42^2$，故知 N 的最大值為 $41^2=1681$。

答：1681

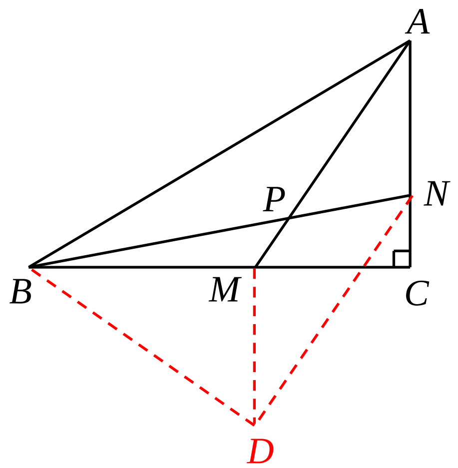
第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在試卷上作答，須詳列過程及說明理由)

1. 如下圖，在△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，點 M 在 BC 上，且 $BM=AC$，點 N 在 AC 上，且 $AN=MC$，AM 和 BN 相交於點 P，試證 $\angle BPM=45^\circ$。

【參考解法 1】

作 $MD\perp BC$ 且 $MD=AN$，連結 ND、BD，如圖所示。(五分)



可知 $MD//AN$ 且 $MD=AN$，故四邊形 $AMDN$ 為平行四邊形，即有 $AM=DN$、$\angle MAN=\angle MDN$、$AM//ND$。

由 $AM//ND$ 可得 $\angle BPM=\angle BND$；

因 $MD=AN=MC$、$BM=AC$、$\angle BMD=\angle ACM=90^\circ$，

故知△$BMD\cong$△ACM，即有 $BD=AM$、$\angle MBD=\angle CAM$。(五分)

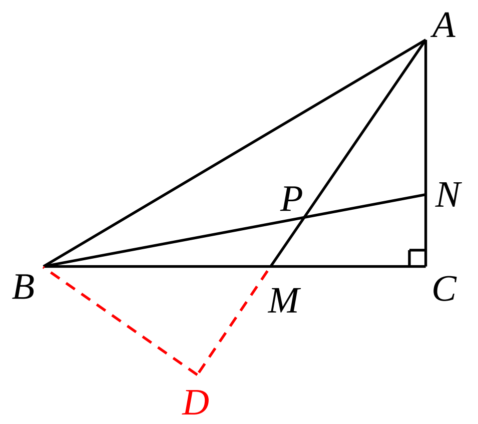
由 $BD=AM$、$AM=DN$ 可得 $BD=DN$；(五分)

由 $\angle MBD=\angle CAM$、$\angle MAN=\angle MDN$ 可得 $\angle MBD=\angle MDN$，

因此 $\angle BDN=\angle MDB+\angle MDN=\angle MDB+\angle MBD=90^\circ$，

故知△BDN 為等腰直角三角形，所以 $\angle BND=45^\circ$，即 $\angle BPM=45^\circ$。(五分)

【參考解法 2】



令 $AN=MC=x$ 、 $BM=AC=y$ ，此時利用勾股定理可得知 $MA=\sqrt{x^2+y^2}$ 。

在 AM 的延長線上取一點 D 使 $BD\perp AD$，此時可知 $\triangle BDM\sim\triangle ACM$，

因此 $BD=\dfrac{MB}{MA}\bullet AC=\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 。(五分)

現觀察 AM 與 $\triangle BNC$ 之間的位置後，利用孟氏定理可得 $\dfrac{BM}{MC}\bullet\dfrac{AC}{AN}\bullet\dfrac{PN}{PB}=1$，即

$\dfrac{PN}{PB}=\dfrac{x^2}{y^2}$(五分)；接著再由勾股定理可得知

$$\begin{aligned}BN&=\sqrt{BC^2+CN^2}\\&=\sqrt{(y+x)^2+(y-x)^2}\\&=\sqrt{2(y^2+x^2)}\end{aligned}$$

故 $PB=\sqrt{2(x^2+y^2)}\times\dfrac{y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{\sqrt{2}y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{2}BD$(五分)。因 $\angle BDP=90^\circ$ ，此時可判斷出 $\triangle BPD$ 為等腰直角三角形，即 $\angle BND=45^\circ$ ，故 $\angle BPM=45^\circ$ 。(五分)

2. 從 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 這十個數碼中任意取出三個不同的數碼組成一個三位數。請問所有組成的三位數中有多少個是 3 的倍數？

【參考解法 1】

考慮將這十個數碼依被 3 除之後所得的餘數來分成三組：

$\{1, 4, 7\}$、$\{2, 5, 8\}$、$\{0, 3, 6, 9\}$。(六分)

可知有以下二種情況可使三個數碼所組成的三位數必是 3 的倍數：

(1) 從同一組中取出三個數碼所組成的三位數必是 3 的倍數：
第一、二組都只有一種取法，每一種取法都可得到 6 個三位數；而第三組有四種取法，其中僅取出 3、6、9 的取法可組成 6 個三位數，而其餘三種取法皆有取出 0，故分別都只能得到 4 個三位數。合計共可得 6×3+4×3=30 個三位數；(六分)

(2) 從三組中各取出一個數碼所組成的三位數必是 3 的倍數：
(i) 若第三組取出的數不為 0 時，共有 3×3×3=27 種取法，每一種取法都可得到 6 個三位數；
(ii) 若第三組出的數為 0 時，共有 3×3=9 種取法，每一種取法都可得到 4 個三位數。合計共可得 6×27+4×9=198 個三位數。((i)、(ii) 各給 3 分,合計六分)

以上二種情況共有 30+198=228 個三位數。(二分)

【參考解法 2】

可知 100 至 999 之間共有 300 個數為 3 的倍數，這些 3 的倍數其數碼和亦必為 3 的倍數。題目要求此三位數之數碼均不相同，故必須扣除三個數碼均相同與恰有二個數碼相同之數。(三分)

(1) 三個數碼均相同的情況共有 111、222、…、999 共 9 個數；(二分)

(2) 恰有二個數碼相同的情況：

  (i) 若二個相同的數碼為 1、4、7 時，則由其數碼和必為 3 的倍數知第三個數碼有 2 種可能取值，每一種取值都可組成 3 個滿足題意的三位數，合計共 18 個三位數；(二分)

  (ii) 若二個相同的數碼為 2、5、8 時，則由其數碼和必為 3 的倍數知第三個數碼有 2 種可能取值，每一種取值都可組成 3 個滿足題意的三位數，合計共 18 個三位數；(二分)

  (iii) 若二個相同的數碼為 3、6、9 時，則由其數碼和必為 3 的倍數知第三個數碼有 2 種不為 0 的可能取值，每一種取值都可組成 3 個滿足題意的三位數，合計共 18 個三位數；(二分)

  (iv) 若二個相同的數碼為 3、6、9 時，則由其數碼和必為 3 的倍數知第三個數碼可為 0，此時每一種取值都可組成 2 個滿足題意的三位數，合計共 6 個三位數；(二分)

  (v) 若二個相同的數碼為 0 時，則由其數碼和必為 3 的倍數知百位數碼可為 3、6 或 9，合計共 3 個三位數；(二分)

故知共有 $300-9-18-18-18-6-3=228$ 個三位數。(五分)

答：228

3. 若方程 $(k^2-1)x^2-6(3k-1)x+72=0$ 的兩根都是正整數，試求 k 所有可能之值。

【參考解法】

利用因式分解可將原方程可化為 $[(k-1)x-6][(k+1)x-12]=0$ (五分)，

因 $k\neq\pm1$，故兩根分別為 $x_1=\dfrac{12}{k+1}$ 、 $x_2=\dfrac{6}{k-1}$ (五分)；

再因 x_1 、 x_2 為正整數，所以 k 為大於 1 的有理數，即可令 $k=\dfrac{m}{n}$，(其中 m、n 為正整數且 m 與 n 互質、$m>n>0$)，此時有 $x_1=\dfrac{12n}{m+n}$ 、 $x_2=\dfrac{6n}{m-n}$ 。現因 $(m+n,n)=(m-n,n)=1$，故知 $(m+n,m-n)\le 2$，因此有 $(m+n)|12$ 、 $(m-n)|6$；再因 $m+n$ 和 $m-n$ 同奇偶，且 $m+n>m-n$，故可得知 $(m+n,\, m-n)=(3,\,1)$、$(4,\,2)$、$(6,\,2)$ 或 $(12,\,2)$。分別解以上四個聯立方程組，可得 $(m,\,n)=(2,\,1)$、$(3,\,1)$、$(4,\,2)$、$(7,\,5)$，所以 k 為 $\dfrac{2}{1}=\dfrac{4}{2}=2$ 、 $\dfrac{3}{1}=3$ 、 $\dfrac{7}{5}$ 。

答：2、3、$\dfrac{7}{5}$ (只給其中二解得五分、給出三解得十分)